Die metrischen Beziehungen

der

Krümmung reciproker Flächen und Kurven

sowie

der Flächeninhalte der letzteren.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen

vorgelegt von

Hermann Ruoss
in Heilbronn.

Stuttgart.
Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei
1891.

Die metrischen Beziehungen

der

Krümmung reciproker Flächen und Kurven

sowie

der Flächeninhalte der letzteren.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doctorwürde

der hohen philosophischen Fakultät der Universität Erlangen

vorgelegt von

Hermann Ruoss
in Heilbronn.

Stuttgart.
Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei
1891.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41535708_0192

Die von Poncelet[1]) synthetisch, von Plücker[2]) analytisch begründete Methode der reciproken Polaren, welche in der Geometrie durch Übertragung projektivischer und metrischer Gesetze die bedeutendste Rolle spielt, ist auch für die Krümmungstheorie von Wichtigkeit geworden. Es läßt sich nämlich unter anderem zeigen, daß jedes konjugierte Liniensystem nicht aufhört konjugiert zu sein, wenn man die Oberfläche, auf der es gezogen ist, einer Transformation durch reciproke Polaren unterwirft; ein Satz, dessen algebraischen Ausdruck wir Brioschi[3]) verdanken.

Aus diesem Satze folgt nun, daß sich auch jede Asymptotenkurve erhält, da sie ja sich selbst konjugiert ist.

Obgleich nun auch die Krümmungslinien und geodätischen Linien keine Invarianten der Reciprocität sind, so erscheint die Aufgabe der Untersuchung der gegenseitigen Krümmungsverhältnisse einer Fläche $\varphi(x\,y\,z) = 0$ und ihrer reciproken $\varphi(u\,v\,w) = 0$, beide bezogen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, doch möglich, insofern der Enneper-Bonnetsche Satz von der Torsion der Asymptotenkurve eine Bestimmung der Flächenkrümmung gestattet. Eine solche Untersuchung ist, soweit meine Kenntnisse der einschlägigen Litteratur diesen Schluß gestatten, noch nicht angestellt worden. In der Ebene hat zwar Mannheim[4]) für die Krümmungsradien reciproker

---

1) Poncelet „Mémoire sur la théorie générale des polaires réciproques", Crelles Jour. Bd. 4.

2) Plücker „Analyt.-geom. Entwicklungen", Bd. 2.

3) Darboux „Leçons sur la théorie générale des surfaces", Bd. 1. num. 95, 96, 97, 109.

4) Mannheim „Journal de Mathématiques pures et appliquées". (Liouville) 2. série, tome XI, p. 193 ff.

Kurven die Relation $\varrho_a = \frac{1}{\varrho_A \cos^3 \alpha}$ gefunden; seine Untersuchungen im Raume aber führen zu der hier aufgestellten Aufgabe nicht Letztere erstrecken sich nämlich auf Beziehungen zwischen den Krümmungsradien von Normalschnitten einer Fläche und von den entsprechenden ebenen Schnitten der reciproken Fläche, die letzteren gehen aber stets durch den Mittelpunkt der Reciprocität; sind also keine Normalschnitte der reciproken Fläche, wodurch eine Aufstellung der Beziehungen zwischen dem Produkt der Hauptkrümmungsradien der einen Fläche und dem der reciproken Fläche ausgeschlossen erscheint; sodann erstrecken sie sich auf Verallgemeinerung des Eulerschen Krümmungssatzes, welche darin besteht, daß die Schnittebenen durch eine beliebige Gerade statt durch eine Flächennormale gelegt werden.

Bei dem Wege, den ich bei der Untersuchung in der Ebene eingeschlagen, ergaben sich die zwei Fragen noch als lösbar:

1) In welcher Beziehung stehen die Flächeninhalte einer Kurve, ihrer reciproken und inversen;
2) welche Beziehungen bestehen zwischen der Art der Krümmung (konkav, konvex) einer Kurve und ihrer reciproken?

Bei allen diesen Untersuchungen tritt der Winkel der Tangentenebene eines Punktes mit seinem Vektor nach dem Mittelpunkt (Pol) der Reciprocität auf, wir nennen ihn Polhöhe[1]) des Flächenpunktes. Von den Ergebnissen hebe ich folgende als besonders bemerkenswert hervor:

Das Produkt der Torsionen in einem Punkt einer Raumkurve und im entsprechenden[2]) der Rückkehr-

[1]) Diese Bezeichnung möge darin ihre Berechtigung haben, dass man unter der Polhöhe eines Erdorts den Winkel seiner Tangentenebene mit seinem Vektor nach dem Himmelspol versteht.

[2]) Punkte heissen hier entsprechend, wenn die Tangentenebene des einen die reciproke Ebene des andern ist.

kante ihrer reciproken Developpabeln ist gleich dem Quadrat des Sinus ihrer Polhöhe.[1])

Das Produkt der Flächenkrümmungen in entsprechenden Punkten einer Fläche und ihrer Reciprokalfläche ist gleich der 4. Potenz des Sinus ihrer Polhöhe.

Die Differenz der Flächeninhalte der Fußpunktskurve einer gegebenen, im Endlichen geschlossenen Kurve und der Fußpunktskurve ihrer Evolute ist konstant für jeden beliebigen Pol, und zwar gleich dem Inhalt der gegebenen Kurve.

Einleitung.

1. Wir setzen, da unsere Untersuchungen sich auf metrische Eigenschaften erstrecken, ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit Ursprung o voraus, dessen Cartesische Punktkoordinaten mit x, y, z; dessen Plückersche Ebenenkoordinaten mit u, v, w bezeichnet werden. Zur Fläche $\varphi(x\,y\,z) = 0$ ist dann $\varphi(u\,v\,w) = 0$ die dualistische oder reciproke Fläche. Einem Punkt $x = a,\ y = b,\ z = c$ auf $\varphi(x\,y\,z) = 0$ entspricht eine Ebene $u = a,\ v = b,\ w = c$, welche Tangentenebene der Reciprokalfläche $\varphi(u\,v\,w) = 0$ ist. Die Gleichung dieser Ebene ist $ax + by + cz + 1 = 0$, ihre negativen reciproken Axenabschnitte sind a, b, c; das Verhältnis der Richtungscosinus ihrer Normalen $a : b : c$, ihr Abstand vom Ursprung $\frac{-1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Der Vektor nach dem Punkt (a, b, c) hat aber die Länge $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, und seine Richtungscosinus verhalten sich wie $a : b : c$; daher:

I. Der Vektor eines Punktes steht senkrecht auf seiner reciproken Ebene, ihr Abstand vom Ursprung ist dem reciproken Wert des Vektors gleich, Vektor und Abstand haben entgegengesetzte Richtungen.

[1]) Die Polhöhen entsprechender Punkte sind gleich.

Nach I. kann man zu jedem Punkt einer Fläche die entsprechende Tangentenebene der Reciprokalfläche konstruieren, und umgekehrt zu jeder Tangentenebene der einen Fläche den entsprechenden Punkt der andern. Da dem Punkt (a, b, c) die Ebene $ax + by + cz + 1 = 0$ entspricht, so ist ersichtlich, daß in Bezug auf die imaginäre Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ der Punkt als Pol, seine reciproke Ebene als entsprechende Polarebene angesehen werden kann. Aus I. folgt:

II. Die Vektoren zweier Punkte machen denselben Winkel wie ihre reciproken Ebenen;

III. 2 Geraden bilden denselben Winkel, wie die durch ihre reciproken Geraden und den Ursprung gelegten Ebenen.

Die Fläche $\varphi(u\,v\,w) = 0$ ist also die zu $\varphi(x\,y\,z) = 0$ reciproke Fläche in Bezug auf die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$.

Wie aus I. hervorgeht, hängt die Form der Fläche $\varphi(u\,v\,w) = 0$ nur von der Lage des Ursprungs o, nicht von den Axenrichtungen ab; $\varphi(u\,v\,w) = 0$ heißt deshalb auch die zu $\varphi(x\,y\,z) = 0$ reciproke Fläche in Bezug auf o als Mittelpunkt der Reciprocität. Würde man statt der Kugel $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ die Kugel $x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ nehmen, so wäre die zu $\varphi(x\,y\,z) = 0$ reciproke Fläche $\varphi(-r^2 u, -r^2 v, -r^2 w) = 0$, eine Fläche, welche zu $\varphi(u\,v\,w) = 0$ ähnlich ist; die Form der reciproken Fläche wird also durch die Größe des Radius nicht beeinträchtigt.

Die Sätze I, II, III rühren von Poncelet her und wurden von ihm für eine reelle Kugel als Fläche der Reciprocität aufgestellt. („Mémoire sur la th. g. d. p. r.“ Crelle Bd. 4, num. 108, 109; vergl. auch Salmon-Fiedler „Kegelsch.“, art. 385; „analyt. G. d. Raums I“, art. 124).

Setzt man an Stelle von reciproker Ebene reciproke Gerade, so erhält man die Reciprocität in der Ebene.

Satz I und II haben mit dieser Abänderung auch dann noch Giltigkeit.

Die Kurve $\varphi(x\,y) = 0$ bezeichnen wir im Folgenden mit C, ihre Reciprokalkurve $\varphi(u\,v) = 0$ mit C'; ihre inverse (durch Transformation reciproker Vektoren erhaltene) $\varphi\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\,,\ \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = 0$ mit C''.

Untersuchungen in der Ebene.

2. Zu einem Punkt A von C findet man im Berührungspunkt seiner reciproken Geraden einen Punkt von C', und umgekehrt zu einer Tangente von C in ihrem reciproken Punkt einen Punkt von C'; solche zwei Punkte nennen wir entsprechende Punkte von C und C'. Die folgenden Rechnungen werden mit Hilfe der Polarkoordinaten: Polhöhe φ, Radiusvektor r ausgeführt.

Wenn man eine Kurve durchlauft, so gelangt man von einem Punkt zu seinem benachbarten, indem man in einer bestimmten Richtung, der Fortschrittsrichtung (Tangente), weitergeht. Unter der Polhöhe φ eines Kurvenpunkts verstehen wir alsdann den Winkel zwischen seiner Fortschrittsrichtung und der Richtung nach einem festen Punkt, dem Pol (Ursprung); unter Radiusvektor r des Kurvenpunkts den Abstand des letztern vom Pol.

Die Polhöhe φ wird von 0 bis 360° gezählt, gegen den Sinn des Uhrzeigers. Ist $f(r\,\varphi) = 0$ die Gleichung einer Kurve in diesen Polarkoordinaten, so ist, wenn r und α die gewöhnlichen Polarkoordinaten sind, $-r\frac{d\alpha}{dr} = tg\,\varphi$, also $f\left(r,\ arc\,tg - r\frac{d\alpha}{dr}\right) = 0$ die Gleichung in gewöhnlichen Polarkoordinaten. Der von zwei benachbarten Radienvektoren eingeschlossene Sektor hat den Inhalt: $dF = -\frac{1}{2}tg\,\varphi\,.\,r\,dr$ $= -\frac{1}{4}tg\,\varphi\,d(r^2) = \frac{r^2}{2}d\alpha$; dF stimmt also mit $d\alpha$ im Vor-

zeichen überein. Das Linienelement wird: $ds = -\frac{dr}{\cos\varphi}$ und ist stets positiv, wie sich leicht durch Berücksichtigung der in Betracht kommenden Fälle ergiebt.

Durchlauft ein Punkt A die Kurve C, so durchlauft sein entsprechender A' die Reciprokalkurve C', und es handelt sich um Bestimmung der Polhöhe entsprechender Punkte, wenn als Pol der Mittelpunkt der Reciprocität gewählt wird.

Sind (Figur 1) $A_1 A_2$ zwei aufeinanderfolgende Punkte von C, so konstruiere man die reciproke Gerade a'_1 von A_1; sie ist Tangente von C', und ihr Berührungspunkt A'_1 ist der reciproke Punkt von $A_1 A_2$, so daß also $A'_1 O \perp A_1 A_2$. Da nun durch die Fortschrittsrichtung $A_1 A_2$ ein dem A'_1 benachbarter Punkt nicht bestimmt ist, so kann dieser noch auf der Tangente a'_1 von O aus gesehen rechts oder links von A'_1 liegen; im ersten Fall ist (von ganzen Vielfachen von 360 abgesehen) die Polhöhe $360 - \varphi$, im letztern $180 - \varphi$, wobei φ die Polhöhe von A_1 ist.

Ist ferner r der Vektor von A_1, so ist der von A'_1 $\pm \frac{1}{r \sin\varphi}$, je nachdem $\sin\varphi$ positiv oder negativ ist.

Für die inverse Kurve C'' von C, welche vom Fußpunkt A''_1 des Lotes von O beschrieben wird[1]), ist dagegen die Polhöhe stets $180 - \varphi$, wie sich sofort ergiebt, wenn man den Kreis zeichnet, welcher durch zwei aufeinanderfolgende Punkte A_1, A_2 von C und ihre inversen A''_1, A''_2 von C'' gehen muß; dagegen ist der Vektor von A''_1 $\frac{1}{r}$. Die Polhöhen in entsprechenden Punkten von C und C' ergänzen sich zu 180° oder 360°; die Polhöhen in entsprechenden Punkten von C und C'' immer zu 180°.

Hieraus folgen für die Flächeninhalte von C, C', C'':

---

[1]) Vgl. Salmon-Fiedler „Höhere Kurven", Art. 123.

$$F = -\frac{1}{4}\int tg\,\varphi\, d\,(r^{-2})$$

$$F' = \frac{1}{4}\int tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2\,\sin^2\varphi}\right)$$ (Das $\pm$ Zeichen des Vektors $\frac{1}{r\sin\varphi}$ fällt weg!)

$$F'' = \frac{1}{4}\int tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

3. Wir suchen jetzt eine Beziehung zwischen den drei Integralen. Es wird:

$$F' = \frac{1}{4}\int \frac{tg\,\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{4}\int tg\,\varphi \cdot \frac{1}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right)$$

Nun ist

$$\int tg\,\varphi \cdot \frac{1}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) = -2\int \frac{\cos\varphi\, tg\,\varphi}{r^2\sin^3\varphi}\, d\varphi$$

$$= -2\int \frac{1}{\sin^2\varphi}\cdot\frac{1}{r^2}\, d\varphi$$

$$= 2\int \frac{1}{r^2}\, d\,(ctg\,\varphi)$$

Letzteres Integral partiell integriert, giebt:

$$\int tg\,\varphi \cdot \frac{1}{r^2}\, d\left(\frac{1}{\sin^2\varphi}\right) = \frac{2}{r^2}\,ctg\,\varphi - 2\int ctg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right), \text{ also}$$

$$F' = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,ctg\,\varphi + \frac{1}{4}\int\left\{\frac{tg\,\varphi}{\sin^2\varphi} - 2\,ctg\,\varphi\right\} d\left(\frac{1}{r^2}\right); \text{ woraus:}$$

(I.) $$F' = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,ctg\,\varphi + \frac{1}{4}\int (tg\,\varphi - ctg\,\varphi)\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad \text{oder:}$$

(II.) $$F' = \frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\,ctg\,\varphi - \frac{1}{2}\int ctg\,2\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Aus I. folgt, wenn die Grenzen von r, r_0 und r_1 und die von φ, φ_0 und φ_1 sind:

(III.) $$F' = \frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1} tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1} ctg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_1^2}\,ctg\,\varphi_1 - \frac{1}{r_0^2}\,ctg\,\varphi_0\right).$$

Wird das Integral auf eine im Endlichen geschlossene Kurve ausgedehnt, so ist $r_1 = r_0$, $\varphi_1 = \varphi_0$, also

$$F' = \frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1 = r_0} tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1 = r_0} ctg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Der Fall, wo die Weglassung des Gliedes mit $ctg\,\varphi$ in Frage steht, wird später behandelt.

Nun ist $\frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1 = r_0} tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) = F''$, es handelt sich also noch um

$$\frac{1}{4}\int_{r_0}^{r_1 = r_0} ctg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Setzen wir $dF''' = \frac{1}{4}\, ctg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right)$ und betrachten dF''' als Sektor mit demselben Centriwinkel wie Sektor $dF'' = \frac{1}{4}\, tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right)$, so muß, da $dF'''\, ctg^2\,\varphi$ mal so groß als dF'' ist, der Radius von $dF''' \frac{1}{r}\, ctg\,\varphi$ sein.

4. Man leitet hieraus folgende Konstruktion des Sektors dF''' aus dF'' ab:

Ist (Figur 2) $OA_1'' A_2''$[1]) der Sektor dF'', so errichte man in A_1'' und A_2'' die Kurvennormalen, diese schneiden die zu den Vektoren OA_1'', OA_2'' senkrechten Vektoren in den Punkten A_1''', A_2'''; und es ist Sektor $OA_1''' A_2''' = dF'''$. Die Punkte A_1''' A_2''' bestimmen eine weitere Kurve C'''. Wir haben jetzt

$$F' = F'' - F'''.$$

5. Zusammenhang zwischen C, C', C'', C'''.

Mit Bezug auf Früheres ist (Figur 2)

$$OA_1'' = \frac{1}{r} \quad , \quad OA_1 = r \quad , \quad \text{Polhöhe } A_2'' A_1'' O = 180 - \varphi \quad ,$$

$$OA_1''' = \frac{1}{r}\, ctg\,\varphi$$[2]);

1) In dieser Figur, wie in den folgenden, ist statt A_1'', A_2'' 1'', 2'' als Bezeichnung gewählt, analog für die andern Punkte A.

2) Die Werte für die Längen der Strecken sind hier absolut zu nehmen.

somit $A_1'' A_1' = O A_1'''$, also $A_1'' A_1' A_1''' O$ ein Rechteck; A_1''' liegt auf der Normalen des Punkts A_1', d. h. auf der durch A_1' gehenden Tangente der Evolute von C'; C''' ist daher die Fußpunktskurve der Evolute von C'. Verlängert man nun $A_1''' O$ bis zum Schnitt A_1'''' mit $A_2 A_1$, so ist aus dem rechtwinkligen Dreieck $O A_1 A_1'''' \; O A_1'''' = r \, tg \, \varphi$, also $O A_1'''' = \frac{1}{O A_1'''}$: der Punkt A_1'''' gehört also der inversen Kurve von C''' an und ist der Endpunkt der Subtangente[1]) von C, da nun C'' Fußpunktskurve von C' ist, so erhält man:

I. Der Flächeninhalt einer Kurve ist gleich der Differenz der Inhalte ihrer eigenen Fußpunktskurve und derjenigen ihrer Evolute.

II. Letztere Fußpunktskurve ist der Ort des Endpunkts der Subnormalen von der ersten Fußpunktskurve; erstere die inverse Kurve der Reciprokalkurve der gegebenen.

6. Der Satz I. in Nummer 5 setzt gemäß Nummer 3 voraus, daß $\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} ctg \, \varphi$ stetig ist entlang der Kurve, nun ist

$$\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} ctg \, \varphi = \frac{sin \, 2\varphi}{4 (r \, sin \, \varphi)^2} = \frac{1}{4} (O A_1')^2 \, sin \, 2\varphi.$$

Diese Voraussetzung deckt sich jedenfalls mit der: Vektor $O A_1'$ nicht unendlich, $sin \, 2\varphi$ stetig.

Bei einer algebraischen Kurve kann nun φ nur im Rückkehrpunkt unstetig werden, φ ändert dort seinen Wert plötzlich um 180°, was jedoch der Stetigkeit von $sin \, 2\varphi$ keinen Eintrag thut.

Satz I. gilt also für alle algebraischen im Endlichen geschlossenen Kurven. Schneidet sich der Perimeter einer der in Betracht kommenden Kurven selbst, so ist die

1) Hieraus liesse sich wieder nach dem Satz: „der Ort des Endpunkts der Polarsubtangente einer Kurve ist die reciproke von der Evolute der Reciprokalkurve“ (Salmon-Fiedler „Höhere Kurven“, Art. 104) rückwärts schliessen, dass C''' die angeführte Eigenschaft hat.

Bedeutung des Flächeninhalts der Kurve nach Jacobi[1]) leicht anzugeben. Ist die Differenz der Flächeninhalte der Fußpunktskurven negativ, so deutet dies ein entgegengesetztes Durchlaufen der gegebenen Kurve und der Fußpunktskurven an.

7. Gleichung der Fußpunktskurve einer Kurve und der ihrer Evolute in Cartesischen Koordinaten.

Ist $f(x\,y\,z) = 0$ die gegebene Kurve in homogenen Koordinaten, so ist die Tangente im Punkt $(x\,y)$

$$Xf'(x) + Yf'(y) + f'(z) = 0\,;\ \text{wo}\ f'(x) = \frac{\partial f}{\partial x},\ f'(y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Das Lot vom Ursprung auf dieselbe ist:

$$Xf'(y) - Yf'(x) = 0,$$

woraus die Fußpunktkurve durch Elimination von x, y, z aus:

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{-f'(x)\cdot f'(z)}{f'(x)^2 + f'(y)^2} \\ Y = \dfrac{-f'(y)\cdot f'(z)}{f'(x)^2 + f'(y)^2} \end{array}\right\} \quad f(x\,y) = 0 \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{ erhalten wird.}$$

Die Normale im Punkt $x\,y$ ist:

$$(X - x)\,f'(y) - (Y - y)\,f'(x) = 0,$$

das Lot vom Ursprung auf dieselbe

$$Xf'(x) + Yf'(y) = 0,$$

woraus die Fußpunktskurve der Evolute durch Elimination von x, y, z aus:

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{-f'(y)\cdot\big(xf'(y) - yf'(x)\big)}{f'(x)^2 + f'(y)^2} \\ Y = \dfrac{-f'(x)\cdot\big(xf'(y) - yf'(x)\big)}{f'(x)^2 + f'(y)^2} \end{array}\right\} \quad f(x\,y) = 0 \quad \left.\begin{array}{l} \\ \\ \end{array}\right\} \text{ erhalten wird.}$$

8. Wir machen einige Anwendungen von Nummer 5 und 7.

Gegebene Kurve: Kreis $(x - b)^2 + y^2 = a^2$, Ursprung o

[1]) Vgl. Baltzer „Elemente der M.“, Bd. 2. § 9, 10.

(Figur 3). Fußpunktskurve in Polarkoordinaten $r = a + b \cos \alpha$, Fußpunktskurve der Evolute des Kreises $(r - b \cos \alpha)^2 = 0$, also Doppelkreis mit Durchmesser b; somit Flächeninhalt der Fußpunktskurve des gegebenen Kreises:

$$\pi a^2 + \frac{1}{2} \pi b^2; \quad \text{mit } b = a$$

Inhalt der Cardioide $\frac{3}{2} \pi a^2$.

Die Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ giebt bekanntlich als Fußpunktskurve in Polarkoordinaten:

$$r^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha.$$

Nun ist $f'(x) = \frac{2x}{a^2}$, $f'(y) = \frac{2y}{b^2}$; die Fußpunktskurve der Evolute erhält man also durch Elimination von $x\,y$ aus:

$$\left.\begin{array}{l} X = \dfrac{-\dfrac{y}{b^2} x y \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}} \\ \\ Y = \dfrac{\dfrac{x}{a^2} x y \left(\dfrac{1}{b^2} - \dfrac{1}{a^2}\right)}{\dfrac{x^2}{a^4} + \dfrac{y^2}{b^4}} \end{array}\right\} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Setzt man zur Elimination $\left\{\begin{array}{l} x = a \cos \lambda \\ y = b \sin \lambda \end{array}\right\}$ in die vorigen Gleichungen ein und eliminiert sodann λ, so wird die gesuchte Kurvengleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2) = x^2 y^2 (a^2 - b^2)^2,$$

welche in Polarkoordinaten übersetzt

$$r = \frac{(a^2 - b^2) \sin 2\alpha}{2 \sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}$$

ergiebt.

Diese Kurve ist, wie aus Figur 4 ersichtlich, 4teilig; ferner sind nach Nummer 5 die 4 über die Ellipse hinausragenden Flächenteile gleich jener 4teiligen Kurve.

9. Anwendung auf Hypocykloiden und Epycykloiden.

Diese Kurven liefern besonders hübsche symmetrische Fußpunktskurven.

a Radius des festen Kreises, b des rollenden, w Wälzungswinkel. Die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} x &= (a+b)\cos\frac{b}{a}w - b\cos\left(1+\frac{b}{a}\right)w \\ y &= (a+b)\sin\frac{b}{a}w - b\sin\left(1+\frac{b}{a}\right)w \end{aligned}\right\}$$

stellen alsdann bei positivem b Epicykloiden, bei negativem b Hypocykloiden dar.

Für die zwei genannten Arten von Fußpunktskurven lassen sich, da die Normale der Cykloiden durch das Momentanzentrum des rollenden Kreises geht, auf geometrische Weise die Polargleichungen finden, man erhält:

$$\left.\begin{aligned} r &= (a+2b)\sin\frac{\alpha}{1+\frac{2b}{a}} \\ r_1 &= a\sin\frac{\alpha}{1+\frac{2b}{a}} \end{aligned}\right\}$$

Die erste stellt die Fußpunktskurve der gegebenen, die letztere die ihrer Evolute dar. Aus den Gleichungen ist ersichtlich, daß beide ähnlich sind; sie befinden sich aber nicht in ähnlicher Lage, da bei Aufstellung der zweiten Polargleichung die Richtung der Polaraxe eine andere war als bei der ersten.

Die Flächeninhalte beider Kurven verhalten sich daher wie $(a+2b)^2 : a^2$; nach Nummer 5 I. ist daher der Inhalt der Epicykloide oder Hypocykloide $\left(\left(1+\frac{2b}{a}\right)^2 - 1\right)$ mal dem Flächeninhalt der Fußpunktskurve der Evolute oder $\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{2b}{a}\right)^2}\right)$ mal dem Flächeninhalt der Fußpunktskurve der gegebenen Kurve.

Diese Kurven haben eine ausführliche Behandlung durch Himsted[1]) erfahren; der Zusammenhang derselben mit den Hypo- und Epicykloiden dürfte indessen neu sein, da er sich in der zitierten Abhandlung nicht findet.

In Figur 5 ist der Inhalt der Hypocykloide 8 mal so groß als der der kleinen 3teiligen Kurve und $^8/_9$ als der der großen 3teiligen Kurve.

In Figur 6 ist die Epicykloide $^{16}/_9$ resp. $^{16}/_{25}$ mal so groß als die kleinere, resp. größere Fußpunktskurve.

(Bei Beurteilung der Flächeninhalte in Figur 6 berücksichtige man das am Schluß von Nummer 6 Gesagte!)

10. Sucht man diejenige Kurve, deren Flächeninhalt mit dem ihrer Reciprokalkurve und ihrer inversen eine gegebene lineare Gleichung erfüllt, etwa diejenige Kurve, deren Inhalt gleich dem ihrer reciproken oder inversen ist, so muß also: $\lambda F + \mu F' + \nu F'' = 0$ sein; wo λ, μ, ν gegebene Konstanten sind.

Diese Gleichung ist jedenfalls erfüllt, wenn die lineare Beziehung auch zwischen den Incrementen der Integrale und damit zwischen beliebigen entsprechenden Sektoren der Kurven erfüllt ist.

Durch Aufstellung der Gleichung der Incremente machen wir uns zugleich unabhängig von der durch Nummer 6 gegebenen Einschränkung. Nun ist

$$(1) \quad F = -\frac{1}{4}\int tg\,\varphi\, d(r^2) = \frac{1}{4}\int tg\,\varphi \,.\, r^4\, d\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

und gemäß Nummer 3

$$(2) \quad F' = \frac{1}{4}\int \frac{tg\,\varphi}{sin^2\,\varphi}\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{1}{r^2}\, d\,(ctg\,\varphi); \text{ ferner}$$

$$(3) \quad F'' = \frac{1}{4}\int tg\,\varphi\, d\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

[1]) Himsted „Über diejenigen Kurven, welche der Polargleichung $r = a\,sin\,\lambda\,.\,\alpha$ entsprechen", Programmabh. Nr. 34 des Progy. Löbau 1888.

Die Gleichung der Incremente ist also:

$$0 = \lambda \cdot r^4 \, d\left(\frac{1}{r^2}\right) tg\,\varphi + \mu \, d\left(\frac{1}{r^2}\right) tg\,\varphi\,(1 + ctg^2\,\varphi) + 2\,\mu \frac{1}{r^2} d\,(ctg\,\varphi) + \nu\, d\left(\frac{1}{r^2}\right) tg\,\varphi$$

oder nach Division mit $tg\,\varphi$:

$$0 = d\left(\frac{1}{r^2}\right)\left\{\lambda r^4 + \mu\,(1 + ctg^2\,\varphi) + \nu\right\} + \frac{2\,\mu}{r^2}\, ctg\,\varphi\, d\,(ctg\,\varphi)$$

oder endlich:

$$0 = d\left(\frac{1}{r^2}\right)\left\{\lambda r^4 + \mu\,(1 + ctg^2\,\varphi) + \nu\right\} + \frac{\mu}{r^2} d\,(ctg^2\,\varphi + 1).$$

Setzt man nun $\frac{1}{r^2} = \varrho$ und $ctg^2\,\varphi + 1 = z$, so erhält man die Eulersche Differentialgleichung:

$$\frac{dz}{d\varrho} + \frac{z}{\varrho} = -\left\{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\varrho^3} + \frac{\nu}{\mu} \cdot \frac{1}{\varrho}\right\},$$

deren Integral:

$$z = \varrho^{-1}\left\{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\varrho} - \frac{\nu}{\mu} \cdot \varrho + 2\,K_1\right\} = \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\varrho^2} - \frac{\nu}{\mu} + \frac{2\,K_1}{\varrho}$$

wird; hier wie im Folgenden, bedeutet K eine Konstante. Nun ist aber $z = ctg^2\,\varphi + 1$, also

$$ctg\,\varphi = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{1}{\varrho^2} + \frac{2\,K_1}{\varrho} - \left(\frac{\nu}{\mu} + 1\right)}$$

Nach Nummer 2 ist: $ctg\,\varphi = -\frac{dr}{r\,d\,\alpha}$; also, da $r^2 = \frac{1}{\varrho}$, $ctg\,\varphi = \frac{1}{2\,\varrho}\frac{d\varrho}{d\,\alpha}$, somit:

$$\frac{d\varrho}{2\,d\,\alpha} = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu} + 2\,K_1 \cdot \varrho - \left(\frac{\nu}{\mu} + 1\right)\varrho^2} \quad \text{oder:}$$

$$\frac{d\varrho}{\sqrt{\frac{\lambda}{\mu} + 2\,K_1\,\varrho - \left(\frac{\nu}{\mu} + 1\right)\varrho^2}} = 2\,d\,\alpha.$$

Ist $\left(\frac{\nu}{\mu} + 1\right)$ positiv, so kommt hieraus:

$$-\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\ arc\ cos\ \frac{\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)\varrho - K_1}{\sqrt{K_1^2+\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}} = 2\alpha + K_1, \text{ woraus:}$$

$$\frac{\mu}{\mu+\nu}K_1 + \sqrt{\left(\frac{\mu}{\mu+\nu}K_1\right)^2+\frac{\lambda}{\mu+\nu}}\cos\left(2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}+K_3\right)=\varrho.$$

Nimmt man die Polaraxe so, daß K_3 verschwindet, so erhält man mit $K_1 \cdot \frac{\mu}{\mu+\nu} = K_4$

$$(1)\quad K_4 + \sqrt{K_4^2+\frac{\lambda}{\mu+\nu}}\cos\left(2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\right)=\frac{1}{r^2}.$$

Ist $\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)$ negativ, so ist, da

$$\cos\left(2\alpha\,.\,i\,.\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=\cos hyp\left(2\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)\text{ ist,}$$

$$(2)\quad K_4 + \sqrt{K_4^2+\frac{\lambda}{\mu+\nu}}\cos hyp\,.\left(2\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=\frac{1}{r^2}$$

die Gleichung der gesuchten Kurve.

Wir untersuchen nun die Gestalt der Kurven (1) und (2).

Ist $\lambda = 0$, so folgt aus (1):

$$K_4\left\{1 \pm \cos\left(2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\right)\right\}=\frac{1}{r^2},\quad \text{oder}$$

$$2K_4\cos^2\left(\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\right)=\frac{1}{r^2}\ ^{1)}\qquad \text{und radiziert:}$$

$$(1')\quad K_5\cos\left(\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\right)=\frac{1}{r}$$

Aus (2) folgt mit $\lambda = 0$

$$2C_4\cos hyp^2\,.\left(\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=\frac{1}{r^2}\ ^{2)}\qquad \text{und radiziert:}$$

---

1) Statt cos^2 könnte man auch (mit Benützung des negativen Zeichens der vorigen Gleichung) sin^2 setzen, was indessen nur einer Drehung der Polaraxe entspricht.

2) Statt $cos\ hyp^2$ könnte man auch $sin\ hyp^2$ setzen.

$$(2')\quad C_5 \cos hyp\left(\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=\frac{1}{r}.$$

Wie aus (1') hervorgeht sind die inversen Kurven der gesuchten Himstedsche Kurven, deren Polargleichung:

$$C_5 \cos\left(\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu}+1}\right)=r.$$

In Figur 10 sind für den Fall $\frac{\nu}{\mu}=3$ C'', C' und C dargestellt, und es ist also der Flächeninhalt von C' das 3fache von demjenigen ihrer Fußpunktskurve C''; sollen beide gleich sein, so muss $\frac{\nu}{\mu}=\pm 1$ sein. Das positive Vorzeichen giebt die transcendente Kurve

$$C_5 \cos\left(\sqrt{2}\,.\,\alpha\right)=r;$$

das negative den Kreis $C_5=r.$

Gehen wir zu den transcendenten Kurven (2') über, so ist ersichtlich, daß ihre inversen:

$$C_5 \cos hyp\,.\left(\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=r$$

in enger Beziehung zur Kettenlinie $y=\frac{1}{2\,a}\cos hyp\,(a\,.\,x)$ stehen; denn $C_5 \cos hyp\left(x\,.\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)=y$ stellt eine Kurve von der Form der Kettenlinie dar [1]). Man macht also α gleich den Abscissen, r gleich den Ordinaten der letzteren, so erhält man die inverse Kurve der gesuchten.

Die Form dieser inversen, herzförmig verschlungenen Kurve ist aus Figur 11 ersichtlich. Für

$$r=C_5 \sin hyp\left(\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}\right)$$

geht dieselbe durch den Ursprung.

---

[1]) Mit $C_5=\frac{1}{2\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu}+1\right)}}$ erhält man die Kettenlinie selbst.

Nunmehr ergiebt sich einfach die Gestalt der inversen Kurven zu (1) für $K_4 = 0$. Aus ihrer Gleichung:

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\mu + \nu}} \cos\left(2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu} + 1}\right) = r^2$$

folgt nämlich, daß sie aus den Himstedschen

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\mu + \nu}} \cos\left(2\alpha\sqrt{\frac{\nu}{\mu} + 1}\right) = r$$

dadurch erhalten werden, daß man auf dem Vektor den Wurzelwert des Vektors abträgt; damit bleibt aber die Zahl der Blätter, der Doppelpunkte etc. erhalten, also auch die Form der inversen Kurve im Wesentlichen ungeändert; Gleiches gilt auch von (2) in Bezug auf

$$K_5 \cos hyp\left(2\alpha\sqrt{-\left(\frac{\nu}{\mu} + 1\right)}\right) = r.$$

Ist $\mu = 0$, so liefert die Eulersche Gleichung nach Multiplikation mit $\mu \cdot \varrho$:

$$0 = \frac{\lambda}{\varrho^2} + \nu, \quad \text{also}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{-\frac{\nu}{\lambda}};$$

alle diese Kurven sind Kreise, beschrieben um den Ursprung

Ist $\nu = 0$, so wird gemäß (1)

$$K_4 + \sqrt{K_4^2 + \frac{\lambda}{\mu}} \cos 2\alpha = \frac{1}{r^2}$$

die gesuchte Kurve. Diese in rechtwinkligen Coordinaten ausgedrückt, giebt:

$$K_4 (x^2 + y^2) + \sqrt{K_4^2 + \frac{\lambda}{\mu}} (x^2 - y^2) = 1, \quad \text{also}$$

$$x^2\left(K_4 + \sqrt{K_4^2 + \frac{\lambda}{\mu}}\right) + y^2\left(K_4 - \sqrt{K_4^2 + \frac{\lambda}{\mu}}\right) = 1,$$

also konzentrische Ellipsen oder Hyperbeln.

Diejenige Kurve, deren Inhalt gleich dem ihrer reciproken ist, erhält man mit $\frac{\lambda}{\mu} = \pm 1$.

Das positive Vorzeichen giebt:

$$x^2\left(K_4 + \sqrt{K_4^2 + 1}\right) + y^2\left(K_4 - \sqrt{K_4^2 - 1}\right) = 1,$$

mit $K_4 = 0$ erhält man die gleichzeitige Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$, welche, wie leicht zu ersehen, sich selbst reciprok ist. Das negative Vorzeichen giebt mit $K_4 = 1$ $x^2 + y^2 = 1$, also den Kreis mit Radius 1, welcher sich wieder selbst reciprok ist.

11. Ist k der Krümmungsradius von C im Punkt A_1 der Figur 7, k' der Krümmungsradius der Reciprokalkurve im Punkt A_1', so ist mit den in die Figur 7 eingeschriebenen Bezeichnungen:

$$k \,.\, d\beta = A_1 A_2 = \frac{r\, d\alpha}{\sin\varphi}$$

$$k' \,.\, d\alpha = A_1' A_2' = \frac{1}{r \sin\varphi} \cdot \frac{d\beta}{\sin\varphi}, \quad \text{also:}$$

$$k \,.\, k'\, d\beta\, d\alpha = \frac{1}{\sin^3\varphi}\, d\alpha \,.\, d\beta$$

$$k \,.\, k' = \frac{1}{\sin^3\varphi} \quad \text{oder} \quad \frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k'} = \sin^3\varphi.$$

Das Produkt der Krümmungen in entsprechenden Punkten einer Kurve und ihrer Reciprokalkurve ist dem Kubus des Sinus ihrer Polhöhe gleich.[1])

Kennt man den Krümmungsmittelpunkt zu einem Kurvenpunkt, so kann man daher den Krümmungsmittelpunkt im entsprechenden Punkt der Reciprokalkurve konstruieren. Die Kegelschnitte z. B. können als Reciprokalkurven eines Kreises hergestellt werden[2]), der Ursprung der Reciprocität ist alsdann Brennpunkt derselben, die Zentrale (des Kreises) nach dem Ursprung Hauptaxe, die Ordinate des Brenn-

[1]) Dieser Satz ist der Ausdruck für die Relation $\varrho_a = \frac{1}{\varrho_A \cos^3\alpha}$, welche Mannheim dadurch fand, dass er den Krümmungskreis und den hiezu reciproken Krümmungskegelschnitt auf ihre metrischen Beziehungen untersuchte.

[2]) Salmon-Fiedler „Kegelsch.“, Art. 385.

punkts gleich dem reciproken Wert vom Radius des Kreises. Ist daher der Winkel der Tangente eines Kegelschnitts mit dem Brennstrahl des Berührungspunkts gleich φ, so ist $k = \frac{1}{r \sin^3 \varphi}$, wo $\frac{1}{r}$ die Brennpunktsordinate. Dieser Ausdruck führt auf die bekannte Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes.

12. Ein Punkt liegt auf der $\left\{\begin{matrix}\text{konkaven}\\ \text{konvexen}\end{matrix}\right\}$ Seite eines Bogens, wenn er stets im $\left\{\begin{matrix}\text{konkaven}\\ \text{konvexen}\end{matrix}\right\}$ Winkelraum zweier aufeinanderfolgender Bogenelemente der Kurve liegt; der Bogen selbst heißt dann $\left\{\begin{matrix}\text{konkav}\\ \text{konvex}\end{matrix}\right\}$ gegen diesen Punkt.

Der konkave Teil kann daher in den konvexen nur auf zwei Arten übergehen:

1) dadurch, daß zwei aufeinanderfolgende Bogenelemente ihrer Richtung nach zusammenfallen,
2) daß ein Bogenelement verlängert durch den Punkt geht; also durch einen Wendepunkt, Rückkehrpunkt oder unendlich fernen Punkt; oder aber durch einen Punkt, dessen Tangente durch den Ursprung geht.

Für reciproke Kurven erhalten wir den Satz:

Dem gegen den Mittelpunkt der Reciprocität $\left\{\begin{matrix}\text{konkaven}\\ \text{konvexen}\end{matrix}\right\}$ Teil einer Kurve entspricht wieder ein $\left\{\begin{matrix}\text{konvexer}\\ \text{konkaver}\end{matrix}\right\}$ Teil ihrer Reciprokalkurve.

Beweis (Figur 7 und 8). Ist $A_1 A_2 A_3$ konkav gegen O, so liegt der Schnittpunkt S auf der Verlängerung von $O A_3$. Die zu $A_2 A_3$ parallele Gerade i, welche durch A_1 geht, hat also einen kleineren Abstand von O als $A_2 A_3$, somit ist für den reciproken Punkt J auf der Tangente $A_1' A_1''$ $OJ > OA_2'$; also der reciproke Bogen auch konkav

gegen O. Ist $A_1 A_2 A_3$ konvex gegen O, so liegt S auf dem Vektor $O A_3$ selbst, die Parallele i hat einen größeren Abstand von O als $A_2 A_3$, also ist $OJ < OA_2'$; der reciproke Bogen daher konvex.

Es ist nunmehr auch ersichtlich, daß bei konkaven Bogen die Polhöhe der Reciprokalkurve $180 - \varphi$, bei konvexen $360 - \varphi$ ist.

13. Zur Veranschaulichung des Gesagten nehmen wir eine beliebige bohnenförmige Kurve C (Figur 9) und konstruieren nach Nummer 1) I., mit Zugrundelegung einer beliebigen Einheitsstrecke, zu verschiedenen Tangenten von C ihre reciproken Punkte; zu einzelnen Punkten von C (Wendepunkt, Punkte deren reciproke Geraden Asymptoten sind) ihre reciproken Tangenten. Für die Mittelpunkte O und O_1 ergeben sich dann die zu C reciproken Kurven C' und C_1'; aus den angeschriebenen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 ist dann das in Nummer 12 Gesagte ohne Weiteres ersichtlich.

14. Alle Reciprokalkurven einer Kurve sind projektivisch, verschiebt man die eine von zweien (ohne sie zu drehen) so, daß ihr Mittelpunkt O_1 der Reciprocität mit dem andern O zusammenfällt, so liegen beide in collinearer Lage[1]); Collineationszentrum ist O, die Collineationsaxe geht durch O, die eine Fluchtlinie ist die zu O_1 reciproke Gerade in Bezug auf O als Mittelpunkt der Reciprocität.

Beweis. O Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems $x\,o\,y$, o_1 eines rechtwinkligen Systems, dessen Axen $o\,x_1$, $o\,y_1$ parallel den vorigen; Koordinaten von o_1, $x = x_0$, $y = y_0$. Ist $ax + by + 1 = 0$ Tangente der gegebenen Kurve C, so lautet diese im System $x_1\,o\,y_1$

$$a(x_1 + x_0) + b(y_1 + y_0) + 1 = 0;$$

[1]) Salmon-Fiedler erwähnt für die Reciprokalkurven einer Kurve nur die Übereinstimmung im Grade. Vergl. Sal.-Fied. „Kegelsch.“, Art. 395.

somit als reciproke Punkte derselben für o resp. o_1 als Mittelpunkte der Reciprocität:

$$\left\{\begin{array}{l} x = a \\ y = b \end{array}\right\} \text{ resp. } \left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a}{a x_0 + b y_0 + 1} \\ y_1 = \dfrac{b}{a x_0 + b y_0 + 1} \end{array}\right\}.$$

Dem Punkt $(x\ y)$ der einen Reciprokalkurve entspricht also der Punkt

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{x}{x x_0 + y y_0 + 1} \\ y_1 = \dfrac{y}{x x_0 + y y_0 + 1} \end{array}\right\}$$

der andern Reciprokalkurve.

Verschiebt man das System $x_1\ o\ y_1$ parallel nach $x\ o\ y$, so drücken x, y und x_1, y_1 Koordinaten entsprechender Punkte aus, bezogen auf ein und dasselbe Koordinatensystem $x\ o\ y$.

Ist nun $x\ y$ so gewählt, daß $x x_0 + y y_0 + 1 = 0$, so ist $x_1 = \infty\ y_1 = \infty$; allen Punkten auf $x x_0 + y y_0 + 1 = 0$ entsprechen also ∞ f. Punkte, oder $x x_0 + y y_0 + 1 = 0$, d. h. die zu Punkt $x_0\ y_0$ reciproke Gerade, ist Fluchtlinie. Ist aber $x\ y$ so gewählt, daß $x x_0 + y y_0 = 0$, so ist $x_1 = x$, $y_1 = y$; alle Punkte der Geraden $x x_0 + y y_0 = 0$ sind also selbstentsprechend. Ist $\dfrac{x}{y} = \lambda$, so ist $\dfrac{x_1}{y_1} = \lambda$; alle Geraden durch den Ursprung sind selbstentsprechend, der Ursprung o ist Collineationszentrum.

Mit Hilfe des Gesagten ist es möglich, wenn eine Reciprokalkurve gegeben ist, jede andere daraus zu konstruieren.

15. Analytischer Beweis des Krümmungssatzes 11.

Wir führen diesen Beweis mit Rücksicht auf den beim Raum einzuschlagenden Weg.

Es sei $\left\{\begin{array}{l} x = (t) \\ y = (t) \end{array}\right\}$ die Gleichung der gegebenen Kurve, wo (t) ganz beliebige Funktionen von t vorstellen.

Die Tangente im Punkt $(x\,y)$ ist nun:

$$0 = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ dx & dy & 1 \end{vmatrix},$$

deren Plückersche Linienkoordinaten:

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \dfrac{-dy}{x\,dy - y\,dx} \\ v = \dfrac{dx}{x\,dy - y\,dx} \end{array} \right\}.$$

Ihr reciproker Punkt $(x_1\,y_1)$ ist daher:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{-dy}{x\,dy - y\,dx} \\ y_1 = \dfrac{dx}{x\,dy - y\,dx} \end{array} \right\}$$

$(x\,y)$ und $(x_1\,y_1)$ sind also entsprechende Punkte der Kurve C und ihrer Reciprokalkurve C'. Durch Differentiation ergiebt sich das Bogenelement

$$ds_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(x\,dy - y\,dx)^2}.$$

Der Kontingenzwinkel ε der zu $(x\,y)$ und $(x + dx,\ y + dy)$ reciproken Geraden:

$$x \,.\, X + y\,Y + 1 = 0$$

$$(x + dx)\,X + (y + dy)\,Y + 1 = 0 \quad \text{ergiebt sich aus}^1)$$

$$tg\,\varepsilon = \frac{x\,(y + dy) - y\,(x + dx)}{x\,(x + dx) + y\,(y + dy)}$$

Entwickelt man den Bruch nach Potenzen von $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$, so erhält man bis auf ∞ Kleine 1. Ordnung genau:

$$tg\,\varepsilon = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}, \quad \text{woraus} \quad \varepsilon = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$$

Ist ϱ_1 Krümmungsradius des Punkts $x_1\ y_1$, so ist $\varrho_1 \,.\, \varepsilon = ds_1$, also

---

[1]) Salmon-Fiedler „Kegelsch.“, Art. 25.

$$\varrho_1 = \frac{ds_1}{\varepsilon} = \sqrt{x^2 + y^2}\ \frac{(dx\,d^2y - dy\,d^2x)(x^2 + y^2)}{(x\,dy - y\,dx)(x\,dy - y\,dx)^2}$$

$$= (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \frac{dx\,d^2y - dy\,d^2x}{(x\,dy - y\,dx)^3}\ .$$

Bekanntlich aber ist der Krümmungsradius im Punkt $(x\,y)$

$\varrho = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{dx\,d^2y - dy\,d^2x}$, somit (I.) $\varrho\varrho_1 = \frac{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}\,(dx^2 + dy^2)^{\frac{3}{2}}}{(x\,dy - y\,dx)^3}$.

Aus der Tangentengleichung $0 = \begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ x & y & 1 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix}$ folgt aber

für den Abstand p der Tangente von O:

$$p = \frac{x\,dy - y\,dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}},\ \text{so daß mit } x^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{(II.)}\quad \varrho\varrho_1 = \frac{r^3}{p^3} = \frac{1}{\sin^3 \varphi}\ \text{wird,}$$

wo φ die Polhöhe des Punkts $x\,y$, oder (auf das Vorzeichen von $\varrho\,\varrho_1$ keine Rücksicht genommen) des Punktes $x_1\,y_1$ ist.

Sucht man diejenigen Kurven $\varphi\,(x\,y) = 0$, für welche das Produkt der Krümmungen in entsprechenden Punkten von $\varphi\,(x\,y) = 0$ und $\varphi\,(u\,v) = 0$ konstant ist, so erhält man aus (I.) die Differentialgleichung:

$$(x^2 + y^2)\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right) = \text{Konstante} \cdot \left(x\,\frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Da diese Gleichung gemäß (II.) ausdrückt: Polhöhe φ gleich Konstante, so erhält man für gewöhnliche Polarkoordinaten die Differentialgleichung: $r\,\frac{d\alpha}{dr} = \frac{1}{C}$, wo die Konstante $C = -\,ctg\,\varphi$.

Die Differentialgleichung giebt:

$$lg\,r = C\alpha + C_1.$$

Die Kurve $\varphi\,(x\,y) = 0$ ist also eine logarithmische Spirale, ebenso sind natürlich $\varphi\,(u\,v) = 0$ und die inverse $\varphi\left(\frac{-x}{x^2 + y^2},\ \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = 0$ logarithmische Spiralen, deren ab-

solute Werte von $C = -\cot g\,\varphi$ gleich sind. Mit $C = 0$ erhält man Kreise.

16. Aus der in Nummer 1) I. angegebenen Konstruktion ist ersichtlich, daß für einen ∞ fernen Punkt einer Kurve die entsprechende Tangente der reciproken Kurve durch den Ursprung geht, daß also die Polhöhe ∞ ferner Punkte 0 oder 180° ist und umgekehrt, daß bei dieser Polhöhe einer der entsprechenden Punkte von C und C' ∞ fern sein muß.

Schließt man daher ∞ ferne Punkte aus, so ist die Polhöhe stets endlich; der Krümmung 0 entspricht die Krümmung ∞; der Spitze entspricht der Wendepunkt.

Im Doppelpunkt einer Kurve stellen sich zwei Krümmungen ein, sie entsprechen eindeutig den zwei Krümmungen in den Berührungspunkten der reciproken Doppeltangente.

Untersuchungen im Raum.

17. Bewegt sich eine Tangentenebene der Art, daß ihr Berührungspunkt eine Kurve der einen Fläche beschreibt, so bewegt sich ihr reciproker Punkt auf einer Kurve der Reciprokalfläche und umgekehrt.

Solche zwei Kurven nennen wir entsprechende Kurven der zwei Flächen; der entsprechende Punkt eines Flächenpunktes ist somit der Berührungspunkt seiner reciproken Tangentenebene. Lassen wir den Punkt P auf einer Kurve C von $\varphi(x\,y\,z) = 0$ sich bewegen, so erzeugt bekanntlich seine reciproke Ebene eine Developpable, dieselbe berührt die Reciprokalfläche $\varphi(u\,v\,w) = 0$ längs einer Kurve C', welche C entspricht. Die Rückkehrkante der Developpabeln aber wird im allgemeinen nicht auf der Reciprokalfläche liegen, sie steht indessen zu C' in folgender Beziehung: Die Rückkehrkante ist die Enveloppe der zu den Bogenelementen von C', in Bezug auf die Indicatricen, konjugierten Richtungen; denn nach Dupin schneiden sich die Tangentenebenen in zwei benachbarten Punkten von C' in einer zu ihrer Verbindungslinie konjugierten Geraden. Zur Unter-

suchung der Krümmungsverhältnisse von $\varphi(x\,y\,z) = 0$ und $\varphi(u\,v\,w) = 0$ ist es notwendig, ein Kurvensystem auf $\varphi(x\,y\,z) = 0$ in Beziehung zu setzen zu dem entsprechenden auf $\varphi(u\,v\,w) = 0$. Hiezu eignen sich die Asymptotenkurven, da denselben auf $\varphi(x\,y\,z) = 0$ wieder Asymptotenkurven auf $\varphi(u\,v\,w) = 0$ entsprechen.[1]) Weil nun konsekutive Tangentenebnen einer Asymptotenkurve sich als Oskulationsebenen in einem Linienelement der Asymptotenkurve schneiden, so ist jede Asymptotenkurve Rückkehrkante der Developpabeln, die durch Bewegung der Tangentenebene längs einer solchen entsteht. Die einer Asymptotenkurve C von $\varphi(x\,y\,z) = 0$ reciproke Developpable berührt also $\varphi(u\,v\,w) = 0$ wieder in einer Asymptotenkurve C', welche Rückkehrkante der Developpabeln ist.

18. Um nun die Krümmung in entsprechenden Punkten zu finden, benützen wir den Enneperschen Satz:[2])

> Die Krümmung einer Fläche in einem Punkt ist gleich dem negativen Quadrat von der Torsion der Asymptotenkurve dieses Punkts.

Gegeben sei die Raumkurve:

$$\left\{\begin{array}{l} x = (t) \\ y = (t) \\ z = (t) \end{array}\right\}$$

Nun ist die Ebene durch die drei konsekutiven Punkte $x,\ y,\ z;\ x + dx,\ y + dy,\ z + dz;\ x + 2\,dx + d^2x,\ y + 2\,dy + d^2y,\ z + 2\,dz + d^2z$

$$0 = \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \\ d^2x & d^2y & d^2z & 0 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnen wir zur Abkürzung die symmetrischen De-

---

1) Darboux „Leçons sur la théorie gén. des surfaces“ I. num. 95, 96, 109.

2) Darboux II. Num. 512.

terminanten mit ihrem in Klammern gesetzten Diagonalglied, so werden die Koordinaten der letzten Ebene:

$$u = \frac{-(dy\,d^2z)}{(x\,dy\,d^2z)}, \quad v = \frac{-(dz\,d^2x)}{(x\,dy\,d^2z)}, \quad w = \frac{-(dx\,d^2y)}{(x\,dy\,d^2z)};$$

und daher die Koordinaten ihres reciproken Punktes:

$$\text{(I.)} \quad x_1 = \frac{-(dy\,d^2z)}{(x\,dy\,d^2z)}, \quad y_1 = \frac{-(dz\,d^2x)}{(x\,dy\,d^2z)}, \quad z_1 = \frac{-(dx\,d^2y)}{(x\,dy\,d^2z)}$$

Dieser Punkt liegt auf der Rückkehrkante der reciproken Developpabeln der gegebenen Kurve und entspricht dem Punkt $(x\,y\,z)$. Würde man die Differentiale in t ausdrücken, so hätte man in den drei letzten Gleichungen die Gleichungen der Rückkehrkante. Zur Bestimmung des Linienelements $ds_1 = \sqrt{dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2}$ müssen die drei letzten Gleichungen differentiert werden.

Nun ist bekanntlich das Differential

$$d\,(x\,dy\,d^2z) = (x\,dy\,d^3z).$$

Das Differential der ersten Gleichung in I. giebt somit, wenn man den sich einstellenden Nenner auf die linke Seite bringt:

$$(x\,dy\,d^2z)^2\,dx_1 = -(dy\,d^3z)\,.\,(x\,dy\,d^2z) + (dy\,d^2z)\,.\,(x\,dy\,d^3z)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & x & y & z \\ 0 & dx & dy & dz \\ dy\,d^2z - dz\,d^2y & d^2x & d^2y & d^2z \\ dy\,d^3z - d^3y\,dz & d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

Die letzte Vertikalreihe mit $-dy$, die vorletzte mit dz multipliziert und sodann beide zur ersten Vertikalreihe addiert, giebt:

$$(x\,dy\,d^2z)^2\,dx_1 = \begin{vmatrix} y\,dz - z\,dy & x & y & z \\ 0 & dx & dy & dz \\ 0 & d^2x & d^2y & d^2z \\ 0 & d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}$$

$$= (y\,dz)\,.\,(dx\,d^2y\,d^3z); \text{ somit}$$

$$dx_1 = (y\,dz)\,.\,\frac{(dx\,d^2y\,d^3z)}{(x\,dy\,d^2z)^2}, \quad \text{analog}$$

$$dy_1 = (z\,dx)\,.\,\frac{(dx\,d^2y\,d^3z)}{(x\,dy\,d^2z)^2}$$

$$dz_1 = (x\,dy)\,.\,\frac{(dx\,d^2y\,d^3z)}{(x\,dy\,d^2z)^2}, \quad \text{hieraus}$$

$$ds_1 = \sqrt{(y\,dz)^2 + (z\,dx)^2 + (x\,dy)^2}\,.\,\frac{(dx\,d^2y\,d^3z)}{(x\,dy\,d^2z)^2}.$$

19. Der Torsionswinkel der Kurve

$$\left.\begin{array}{l} x = (t) \\ y = (t) \\ z = (t) \end{array}\right\}$$

ist nun bekanntlich [1])

$$\tau = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}(dx\,d^2y\,d^3z)}{(dy\,d^2z)^2 + (dz\,d^2x)^2 + (dx\,dy)^2},$$

und daher die Torsion

$$T = \frac{\tau}{ds} = \frac{(dx\,d^2y\,d^3z)}{(dy\,d^2z)^2 + (dz\,d^2x)^2 + (dx\,d^2y)^2}$$

Um den Torsionswinkel τ_1 der Rückkehrkante der reciproken Developpabeln der Kurve zu finden, bedenke man, daß die zwei konsekutiven Osculationsebenen in $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_1 + dx_1$, $y_1 + dy_1$, $z_1 + dz_1$ als reciproke Ebenen der Punkte $x\,y\,z$ und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ nach Nummer 1, II. einen Winkel einschließen gleich dem Winkel der Vektoren nach den Punkten $(x\,y\,z)$ und $(x + dx,\ y + dy,\ z + dz)$. Die Richtungscosinus dieser Vektoren sind:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \varrho\,.\,x \text{ (zur Abkürzung)}, \quad \cos\beta = \varrho\,.\,y, \quad \cos\gamma = \varrho\,.\,z$$

$$\cos(\alpha + d\alpha) = \varrho\,.\,x + \varrho\,.\,dx + x d\varrho,\ \cos(\beta + d\beta) = \varrho y + \varrho dy + y d\varrho,$$

$$\cos(\gamma + d\gamma) = \varrho\,.\,z + \varrho\,.\,dz + z d\varrho, \text{ daher [2])}$$

$$\sin^2\tau_1 = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos(\beta+d\beta) & \cos(\gamma+d\gamma) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos(\gamma+d\gamma) & \cos(\alpha+d\alpha) \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos(\alpha+d\alpha) & \cos(\beta+d\beta) \end{vmatrix}^2$$

---

1) Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. d. Raums“ II. Art. 130.

2) Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. d. Raums“ I. Art. 14.

Nun ist

$$\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos(\beta+d\beta) & \cos(\gamma+d\gamma) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \varrho y & \varrho z \\ \varrho y + \varrho\, dy + y\, d\varrho & \varrho z + \varrho\, dz + z\, d\varrho \end{vmatrix}$$
$$= \varrho^2 (y\, dz - z\, dy);$$

ähnliche Ausdrücke ergeben sich für die zwei andern Determinanten rechts, so daß man erhält:

$$\sin^2 \tau_1 = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^2} \left\{ (y\,dz)^2 + (z\,dx)^2 + (x\,dy)^2 \right\}, \text{ also}$$

$$\tau_1 = \frac{\sqrt{(y\,dz)^2 + (z\,dx)^2 + (x\,dy)^2}}{x^2+y^2+z^2},$$

somit die Torsion

$$T_1 = \frac{\tau_1}{ds_1} = \frac{(x\,dy\,d^2z)^2}{(x^2+y^2+z^2)\,.\,(dx\,d^2y\,d^3z)}$$

und daher:

$$T\,.\,T_1 = \frac{(x\,dy\,d^2z)^2}{(x^2+y^2+z^2)\left\{(dy\,d^2z)^2 + (dz\,d^2x)^2 + (dx\,d^2y)^2\right\}}.$$

Betrachtet man nun die Osculationsebene des Punkts $(x\ y\ z)$, nämlich:

$$0 = \begin{vmatrix} X & Y & Z & 1 \\ x & y & z & 1 \\ dx & dy & dz & 0 \\ d^2x & d^2y & d^2z & 0 \end{vmatrix},$$

so ergiebt sich der Abstand p derselben vom Ursprung:

$$p = \frac{(x\,dy\,d^2z)}{\sqrt{(dy\,d^2z)^2 + (dz\,d^2x)^2 + (dx\,d^2y)^2}}, \text{ so daß}$$

$$T\,.\,T_1 = \frac{p^2}{x^2+y^2+z^2}.$$

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ ist aber gleich dem Vektor r des Punkts $(x\ y\ z)$.

Stellt man also die Developpable der gegebenen Kurve her, so ist, da $\frac{p}{r}$ der Sinus der Polhöhe φ des Punkts $(x\,y\,z)$,

$$T\,.\,T_1 = \sin^2\varphi.$$

Die Polhöhe des Punkts $(x_1\ y_1\ z_1)$ der entsprechenden Rückkehrkante muß, weil eine Vertauschung beider Flächen

nichts ändert, auch φ sein. Dies bestätigt sich in der That; denn der Vektor des Punktes $x_1\ y_1\ z_1$ fällt nach 1, I. in die Richtung von p und die Tangentenebene des Punktes $x_1\ y_1\ z_1$ steht senkrecht zum Vektor r des Punktes $x\ y\ z$.

In einem beliebigen Punkt einer Raumkurve und im entsprechenden der Rückkehrkante ihrer reciproken Developpabeln ist das Produkt der Torsionen gleich dem Quadrat des Sinus ihrer Polhöhe.

Gehen wir jetzt auf unsere Flächen $\varphi\ (x\ y\ z) = 0$ und $\varphi\ (u\ v\ w) = 0$ über, welchen die betrachteten Raumkurven als Asymptotenkurven angehören, und sind die Flächenkrümmungen in entsprechenden Punkten $(x\ y\ z)$ und $(x_1\ y_1\ z_1)$ K und K_1, so ist $T^2 = -K$, $T_1^2 = -K_1$; somit $K \cdot K_1 = \sin^4 \varphi$.

Das Produkt der Krümmungen in entsprechenden Punkten einer Fläche und ihrer Reciprokalfläche ist gleich der vierten Potenz des Sinus ihrer Polhöhe.

Diese Herleitung gilt natürlich auch dann noch, wenn die Asymptotenkurven der einen Fläche, und damit auch die der andern, imaginär sind, wenn also die Fläche positiv gekrümmt ist.

20. Über die mittlere Krümmung $M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ in entsprechenden Punkten von $z = \varphi\ (x\ y)$ und $w = \varphi\ (u\ v)$.

Nimmt man einen Flächenpunkt o zum Ursprung, seine Tangentenebene zur $x\ y$-Ebene und wählt die x- und y-Axe so, daß sie die Winkel der durch o gehenden Asymptotenkurven halbieren, so ergeben sich die Fortschrittsrichtungen der Asymptotenkurven im Punkt o aus:

$$r\,dx^2 + t\,dy^2 = 0, \quad \text{also} \quad \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{-\frac{r}{t}},$$

und da die $x\ y$-Ebene Osculationsebene der Asymptotenkurve, so ist für den Winkel α, welchen die zwei Asymptotenkurven in o einschließen:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{-\frac{r}{t}}, \text{ woraus}$$

$$tg\,\alpha = \frac{2\sqrt{-rt}}{r+t}.$$

Die allgemeine Gleichung:

$$R^2(rt - s^2) - R\sqrt{1+p^2+q^2}\left\{(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2\,p\,q\,s\right\} + (1+p^2+q^2)^2 = 0$$ [1])

der zwei Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 geht aber für unsern Ursprung, für welchen $p = q = s = 0$ ist, über in

$$R^2 \,.\, rt - R(r+t) + 1 = 0, \quad \text{so daß}$$

$$\frac{1}{R_1 \,.\, R_2} = rt, \quad \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t$$

wird, daher ist

$$tg\,\alpha = \frac{\sqrt{-\text{Krümmungsmaß}}}{\text{mittlere Krümmung}}.$$

Multipliziert man die mittleren Krümmungen M und M_1 in einem Punkt auf $z = \varphi(x\,y)$ und in seinem entsprechenden auf $w = \varphi(u\,v)$, so erhält man jetzt:

$$M \,.\, M_1 = ctg\,\alpha\; ctg\,\alpha_1\; sin^2\,\varphi,$$

wo α_1 der Winkel der Asymptotenkurven im entsprechenden Punkt auf $w = \varphi(u\,v)$ ist, und wo φ die Polhöhe der entsprechenden Punkte ist.

(Nach Nummer 1, III. ist α_1 auch gleich dem Winkel, den die durch den Ursprung und die Fortschrittsrichtungen der Asymptotenkurven auf $z = \varphi(x\,y)$ gelegten Ebenen einschließen.)

Soll $z = \varphi(x\,y)$ und $w = \varphi(u\,v)$ in entsprechenden Punkten konstantes Krümmungsprodukt haben, so muss nach Nummer 19 die Polhöhe konstant sein.

Dies liefert die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} - z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}} = \text{Konstante}.$$

[1]) Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. d. Raums“ II. Art. 54.

Dieser Differentialgleichung genügen, nach Nummer 15 Schluß, die Rotationsflächen logarithmischer Spiralen, deren Rotationsaxen durch den Anfangspunkt der Spiralen gehen, sonst aber beliebige Richtung haben. Ihre reciproken und inversen Flächen sind auch wieder Rotationsflächen derselben Art.

21. Wie in Nummer 16 erhält man auch hier wieder: Ein ∞ ferner Punkt einer Fläche hat die Polhöhe 0 oder 180°, und umgekehrt zeigt diese Polhöhe zwei entsprechende Punkte an, von denen einer ∞ fern ist.

Schließt man ∞ ferne Punkte aus, so gilt auch hier wieder: Der Krümmung 0 entspricht die Krümmung ∞ und umgekehrt.

Aus dem am Schlusse von Nummer 19 Gesagten geht daher hervor: Dem $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ gekrümmten Teil einer Fläche entspricht ein $\left\{\begin{matrix}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{matrix}\right\}$ gekrümmter Teil der reciproken Fläche; dem Übergang beider Teile durch eine Kurve von der Flächenkrümmung 0 entspricht der Übergang durch eine Kurve von der Flächenkrümmung ∞ und umgekehrt.

Zur Veranschaulichung des Gesagten nehmen wir die Rotationsfläche $z = a \cos b \sqrt{x^2 + y^2}$, deren Meridian $z = a \cos bx$ ist. Ihre reciproke Fläche ist die Rotationsfläche $w = a \cos b \sqrt{u^2 + v^2}$, deren Meridian $w = a \cos b \,.\, u$ die zu $z = \cos bx$ reciproke Kurve ist. Wir konstruieren letztere aus ersterer, so wie wir aus der bohnenförmigen Figur 9 die Reciprokalkurven konstruiert haben.

Während der mittlere Teil (Figur 12) ersterer Fläche Hutform besitzt, hat der entsprechende der letzteren die Form eines eingedrückten Hutes; der +-gekrümmte Teil ist in den —-gekrümmten eingedrückt; der parabolischen Kurve der ersten mit dem Krümmungsmaß 0 entspricht die Cuspidalkurve der zweiten mit dem Krümmungsmaß ∞; an

letztere schließen sich die Asymptotenkurven berührend an, an erstere in Spitzen, also nicht berührend.

Was die Kurven von der Flächenkrümmung ∞ oder o anlangt, so trennen sie nicht notwendig positiv von negativ gekrümmten Teilen.

Bezeichnet man die zwei Krümmungsradien, aus denen sich die Flächenkrümmung zusammensetzt, mit R_1 und R_2, so deutet $R_1 = o$ eine Cuspidalkurve oder einen Knotenpunkt an. Bei der Krümmung ∞ wird sich daher stets eine Cuspidalkurve oder ein Knotenpunkt einstellen.

Eine Cuspidalkurve oder ein Knotenpunkt kann jedoch auch auftreten bei der Krümmung o, wenn $R_1 = o$, $R_2 = \infty$ und $\frac{1}{R_1 R_2} = o$; ja sogar bei endlicher Krümmung, wenn $\frac{1}{R_1 . R_2} = \frac{1}{o . \infty}$ = endlich.

Beispiele hiefür sind:

$$z = \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 1\right)^{\frac{n}{2}}, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2} + \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Ist $n = 5$ resp. 3, so ist für die Punkte der Cuspidalkurve der ersteren Fläche $R_1 = o$, $R_2 = \infty$ und die Krümmung o resp. $^9/_8$.

Für den Knotenpunkt (o, o, o) der zweiten Fläche ist für $n = 5$ resp. 3 $R_1 = o$, $R_2 = \infty$ und die Krümmung o resp. $^3/_2$.

22. Wir behandeln jetzt die Flächenkrümmungen längs einer Doppelkurve, sowie die Flächenkrümmungen eines Knotenpunktes.

Einer Doppelkurve C einer Fläche, deren Punkte biplanare Doppelpunkte sind, entsprechen die zwei Berührungskurven C_1' C_2' der ∞ vielen Doppeltangentenebenen der Reciprokalfläche; das eindeutige Entsprechen der zwei Wertepaare von Flächenkrümmungen längs C geschieht dadurch, daß sich C_1' auf den einen Flächenzweig der Doppelkurve, C_2' auf den andern bezieht. Wird die Doppelkurve Cuspi-

dalkurve, so fallen die zwei Wertepaare zusammen, aber auch die zwei Kurven.

Von ganz besonderem Interesse sind die Krümmungsverhältnisse eines Knotenpunktes P und seiner entsprechenden Kurve.

Für einen Knotenpunkt wird die Differentialgleichung der Krümmungslinien illusorisch, wie bei einem Kreispunkt, die Zahl der Krümmungslinien durch denselben ist aber ∞ groß.

Zum Beweis hiefür nehmen wir P zum Ursprung, seine Verbindungslinie mit einem ∞ benachbarten Punkt P' zur Z-Axe, die Tangentenebene durch $P\,P'$ zur $Z\,Y$-Ebene. Da der Tangentenkegel in P mit der $Z\,Y$-Ebene die Schnittkurve $\left\{\begin{matrix} x &= 0 \\ y^2 &= 0 \end{matrix}\right\}$ liefern muß, so ist die Flächengleichung von der Form:

$$0 = Ax^2 + By^2 + 2\,Czx + 2\,Dxy + (x\,y\,z)_3 + (x\,y\,z)_4 + \ldots,$$

wo mit $(x\,y\,z)_n$ eine homogene Funktion n ten Grades in $x\,y\,z$ bezeichnet werde. C darf nicht Null werden, da sonst der Tangentenkegel in ein Ebnenpaar zerfiele; dasselbe gilt für B.

$(x\,y\,z)_3$, $(x\,y\,z)_4 \ldots$ nach Potenzen von z geordnet, giebt:

$$(x\,y\,z)_3 = a\,z^3 + z^2\,(bx + cy) + z\,(xy)_2 + (xy)_3$$

$$(x\,y\,z)_4 = a_1\,z^4 + z^3\,(b_1\,x + c_1\,y) + z^2\,(xy)_2 + z\,(xy)_3 + (x\acute{y})_4.$$

Der Punkt P' hat die Koordinaten 0, 0, ζ; wo ζ ∞ klein ist; die Flächennormale in P für $P\,P'$ ist die x-Axe; schneidet daher die Flächennormale in P' die x-Axe, so ist $P\,P'$ Element der Krümmungslinie. Nun verhalten sich die Richtungscosinus der Flächennormale in P' wie $f'(x) : f'(y) : f'(z)$, wo für x, y, z, 0, 0, ζ zu setzen ist. Aus obiger Flächengleichung erhält man für dieses Verhältnis:

$$(2\,C\zeta + b\,\zeta^2 + b_1\,\zeta^3 + \ldots) : (c\,\zeta^2 + c_1\,\zeta^3 + \ldots) : (3\,a\,\zeta^2 + 4\,a_1\,\zeta^3 + \ldots),$$

da ζ ∞ klein und C nicht Null, so ist dieses Verhältnis 1 : 0 : 0; die Normale schneidet die x-Axe, und da $\dfrac{f'(z)}{f'(y)} = \dfrac{3\,a}{c}$, so wird der Schnittpunkt im allgemeinen endlich sein.

Die Normalen um den Punkt P herum schneiden sich also mit den ihnen jeweilig zugeordneten Normalen durch P', sie schneiden sich aber nicht untereinander wie in einem Kreispunkt. Legt man durch die x-Axe und PP' die Normalebene, so schneidet diese die Fläche nach einer Kurve, die in P einen Doppelpunkt besitzt.

Derjenige Zweig des Doppelpunktes nun, welcher PP' enthält, hat in P einen (im allgemeinen endlichen) Krümmungsradius R_1, den einen Hauptkrümmungsradius für die Fortschrittsrichtung PP'.

Um den andern R_2 zu erhalten, lege man durch P' die Ebene senkrecht PP', sie liefert die Schnittkurve:

$$\left.\begin{array}{r} z = \zeta \\ 0 = Ax^2 + 2Dxy + By^2 + \zeta\{2Cx + (xy)_2 + (xy)_3 + \ldots\} \\ + \zeta^2\{(xy)_1 + (xy)_2 + \ldots\} + \ldots \end{array}\right\}$$

Nun ist der Krümmungsradius im Punkt (xy) der Kurve $f(xy) = 0$

$$R = \frac{\{f'(x)^2 + f'(y)^2\}^{3/2}}{f'(y)^2 \cdot f''(xx) - 2f'(x)f'(y)f''(xy) + f'(x)^2 f''(yy)};$$

dies giebt für den Punkt $x = 0$, $y = 0$ der obigen Schnittkurve

$$R_2' = \frac{(4C^2\zeta^2 + \text{höhere Potenzen von } \zeta)^{3/2}}{8C^2B\zeta^2 + \text{höhere Potenzen von } \zeta}.$$

Mit $\zeta = 0$ geht dieser Krümmungsradius in den gesuchten R_2 des Punktes P über, und da B und C nicht Null, so ist $R_2 = \left.\frac{C\zeta}{B}\right|_{\zeta = 0}^{= 0}$. Da R_1 im allgemeinen endlich, so ist die Flächenkrümmung in einem Knotenpunkt im allgemeinen ∞.

Was nun R_1 im speziellen anlangt, so kann es sechs Fortschrittsrichtungen geben[1]), für welche $R_1 = \infty$. Diese sind die reellen gemeinschaftlichen Strahlen des Tangentenkegels mit dem Kegel $(x\,y\,z)_3 = 0$; denn jeder Normal-

[1]) Salmon-Fiedler „Analyt. Geom. d. Raums“ II. Art. 11.

schnitt durch einen solchen Strahl liefert einen Zweig der Schnittkurve, der in P einen Wendepunkt besitzt.

Die Flächenkrümmung $\frac{1}{R_1 \cdot R_2} = \frac{1}{\infty \cdot 0}$ kann aber hier für algebraische Flächen nicht endlich sein, da ein plötzliches Überspringen vom ∞ ins Endliche hier unmöglich ist.

Giebt es aber nicht bloß 6, sondern ∞ viele Fortschrittsrichtungen mit 4punktigem Schnitt (mit der Fläche), so kann $\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{1}{\infty \cdot 0}$ endlich oder Null sein.

Dies kann dadurch eintreten, daß der Kegel $(x\,y\,z)_3 = 0$ oder der Tangentenkegel zweiter Ordnung verschwindet, oder dadurch, daß ersterer in letzteren und eine Ebene zerfällt.

So ist z. B. im Knotenpunkt (0, 0, 0) der Fläche $z = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{x^2+y^2}^3$ die Flächenkrümmung $\frac{3}{2}$.

23. Dem Knotenpunkt entspricht nun eine ebene Kurve C', welche Berührungskurve seiner reciproken Tangentenebene ist.

Einer bestimmten Tangentenebene, welche die zwei benachbarten Punkte P und P' enthält, entspricht ein ganz bestimmter Punkt C', und da zu $P\,P'$ eine bestimmte Flächenkrümmung gehört, so sind die Flächenkrümmungen von P und C' auf diese Weise eindeutig aufeinander bezogen. Im allgemeinen werden daher die Flächenkrümmungen in C' Null. C' selbst wird Krümmungslinie werden, die zwei orthogonalen Hauptnormalschnitte durch einen beliebigen Punkt von C' sind:

> die Normalebene durch die Tangente an C' und die hiezu orthogonale Ebene; der Hauptkrümmungsradius des ersten Schnitts ist im allgemeinen ∞, der des letzteren im allgemeinen endlich.

24. Asymptotenkurven. Krümmungslinien.

Kennt man die Asymptotenkurven einer Fläche $f(xyzt) = 0$, wo t die vierte, die Gleichung homogen machende Veränder-

liche ist, so kennt man auch die Asymptotenkurve der reciproken Fläche $f(u\,v\,w\,p) = 0$, wo p diese vierte Veränderliche ist, da die Punkte der letzteren Fläche reciprok sind zu den Tangentenebenen in den Punkten der ersteren.

Sind insbesondere in den Flächengleichungen

$$\left.\begin{array}{l} x = (\alpha\beta) \\ y = (\alpha\beta) \\ z = (\alpha\beta) \\ t = (\alpha\beta) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = \text{Konstante}, \ \beta = \text{Konstante} \\ \text{Asymptotenkurven,} \end{array}$$

so sind in der reciproken Fläche:

$$\left.\begin{array}{l} u = (\alpha\beta) \\ v = (\alpha\beta) \\ w = (\alpha\beta) \\ p = (\alpha\beta) \end{array}\right\} \begin{array}{l} \alpha = \text{Konstante}, \ \beta = \text{Konstante} \\ \text{Asymptotenkurven.} \end{array}$$

Anders verhält es sich mit den Krümmungslinien, welche wir nun untersuchen.

Zieht man (Figur 13) auf $f(u\,v\,w) = 0$ die Krümmungslinie C, so schneiden sich die Tangentenebenen α, β zweier benachbarter Punkte A_1 und A_2 in einer Geraden $(\alpha, \beta) \perp (A_1 A_2)$; den Tangentenebenen α und β entsprechen zwei Punkte α' und β' auf $f(x\,y\,z) = 0$, deren Tangentenebenen A_1', A_2' sich in einer zu $(\alpha'\,\beta')$ konjugierten Richtung $(A_1'\,A_2')$ schneiden, da nun $(\alpha\,\beta) \perp (A_1\,A_2)$, so müssen nach Num. 1, III. die zwei durch den Ursprung, $(\alpha'\,\beta')$ resp. $(A_1'\,A_2')$, gelegten Ebenen senkrecht stehen. Diese so bestimmten Richtungen bilden auf $f(x\,y\,z) = 0$ ein konjugiertes System, welches den Krümmungslinien auf $f(u\,v\,w) = 0$ entspricht und die Eigenschaft besitzt, daß in jedem Punkte die Ebenen durch die zwei Tangenten des Systems und den Ursprung senkrecht stehen.

Ist auf $f(x\,y\,z) = 0$ die Indikatrix des Punkts $(x\,y\,z)$ ein Kreis, so giebt es, so lange die Flächennormale desselben nicht durch den Ursprung geht, in dem Kreise nur zwei konjugierte Fortschrittsrichtungen, deren Ebenen durch den Ursprung senkrecht stehen; einem solchen Nabelpunkt

(Kreispunkt) entspricht also im allgemeinen kein Nabelpunkt auf $f(u\,v\,w) = 0$; ist aber die Indikatrix von der 3. Ordnung, so gehen bekanntlich von ihm im allgemeinen drei Asymptotenkurven und drei Krümmungslinien aus, in diesem Fall ist der entsprechende Punkt wieder Nabelpunkt, da wieder drei Asymptotenkurven von ihm ausgehen.

25. Für die Krümmungslinien selbst und ihr entsprechendes konjugiertes System kann man mit Hilfe ihres sphärischen Bildes eine durchaus symmetrische Gleichung [1]) aufstellen.

Sind P_1 und P_2 zwei aufeinanderfolgende Punkte einer Krümmungslinie, so bilden ihre Normalen ein gleichschenkliges Dreieck; fällt man nun vom Ursprung o Normalen auf die Tangentenebenen in P_1 und P_2 und trägt auf ihnen $OP_1' = OP_2' = 1$ ab, so muß daher ihre Verbindungslinie $P_1' P_2'$ parallel $P_1 P_2$ sein) [2], also auch parallel der Ebene $O P_1 P_2$. Eine mit $P_1' P_2'$ (der Verbindungslinie der sphärischen Bilder von P_1 und P_2) durch den Ursprung gezogene Parallele muß also mit OP_1 und OP_2 in einer Ebene liegen. [3])

Sind nun u, v, w, $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ die Koordinaten der Tangentenebenen in P_1 und P_2, so sind die Koordinaten des sphärischen Punkts P_1' $\frac{u}{r}, \frac{v}{r}, \frac{w}{r}$, wo $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$; die von P_2' $\frac{u}{r} + d\left(\frac{u}{r}\right)$, $\frac{v}{r} + d\left(\frac{v}{r}\right)$, $\frac{w}{r} + d\left(\frac{w}{r}\right)$, somit das Verhältnis der Richtungscosinus von $P_1' P_2'$ $d\left(\frac{u}{r}\right) : d\left(\frac{v}{r}\right) : d\left(\frac{w}{r}\right)$.

Die drei Koordinaten des Punktes P_1 verhalten sich

1) Dies trifft bei der in der folgenden Anmerkung angeführten Gleichung Darboux's nicht zu.

2) Vergl. Darboux „Leçons s. l. t. g. d. surfaces“ II. Num. 488.

3) Diese Eigenschaft besitzen nur die Krümmungslinien.

aber wie $f'(u) : f'(v) : f'(w)$; die von P_2 wie $\{f'(u) + df'(u)\} : \{f'(v) + df'(v)\} : \{f'(w) + df'(w)\}$, und da die Richtungscosinus ihrer Vektoren sich ebenso verhalten, so giebt obige Bedingung:

$$0 = \begin{vmatrix} f'(u) & df'(u) & d\left(\frac{u}{r}\right) \\ f'(v) & df'(v) & d\left(\frac{v}{r}\right) \\ f'(w) & df'(w) & d\left(\frac{w}{r}\right) \end{vmatrix}, \text{ wo } r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}.$$

Die Gleichung des entsprechenden konjugierten Systems auf $f(x\,y\,z) = 0$ ist daher:

$$0 = \begin{vmatrix} f'(x) & df'(x) & d\left(\frac{x}{r}\right) \\ f'(y) & df'(y) & d\left(\frac{y}{r}\right) \\ f'(z) & df'(z) & d\left(\frac{z}{r}\right) \end{vmatrix}, \text{ wo } r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

und unterscheidet sich von der Gleichung der Krümmungslinien:

$$0 = \begin{vmatrix} f'(x) & df'(x) & dx \\ f'(y) & df'(y) & dy \\ f'(z) & df'(z) & dz \end{vmatrix}$$

dadurch, daß an Stelle von $d\left(\frac{x}{r}\right) dx$ getreten ist.

Anmerkung. Die obige Gleichung stimmt natürlich mit der Darboux's (I. partie, Num. 158)

$$0 = \begin{vmatrix} f'(u) & df'(u) & u & du \\ f'(v) & df'(v) & v & dv \\ f'(w) & df'(w) & w & dw \\ f'(p) & df'(p) & o & o \end{vmatrix} \text{ überein.}$$

Es ist nämlich für die Flächengleichung $f(u\,v\,w\,p) = 0$

$$f'(p) \Big|_{p=1} = u f'(u) + v f'(v) + w f'(w)$$

$$df'(p) \Big|_{p=1} = du f'(u) + dv f'(v) + dw f'(w) + u\,df'(u) + v\,df'(v) + w\,df'(w)$$

und da $u + du$, $v + dv$, $w + dw$ die Gleichung $f(u\,v\,w) = 0$ befriedigen müssen, so muß

$$du\,f'(u) + dv\,f'(v) + dw\,f'(w) = 0$$

sein; setzt man jetzt für $f'(p)$, $df'(p)$ ihre Werte in die Determinante und subtrahiert von der letzten Horizontalreihe das u, v, w fache der andern, so erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} f'(u) & df'(u) & u & du \\ f'(v) & df'(v) & v & dv \\ f'(w) & df'(w) & w & dw \\ 0 & 0 & u^2 + v^2 + w^2 & u\,du + v\,dv + w\,dw \end{vmatrix}$$

Multipliziert man die letzte Vertikalreihe mit $u^2 + v^2 + w^2$ und subtrahiert hievon das $(u\,du + v\,dv + w\,dw)$ fache der vorletzten Vertikalreihe, so erhält man, da

$$du(u^2 + v^2 + w^2) - u(u\,du + v\,dv + w\,dw) = du \,.\, r^2 - u \,.\, r\,dr$$
$$= r^3\, d\left(\frac{u}{r}\right)$$

ist, obige symmetrische Determinante.

26. Graphisch-mechanische Herstellung der Reciprokalkurven einer Kurve.

Die Geradführung von Peaucellier[1]) besteht bekanntlich aus einem Rhombus $A\,B\,E\,D$, dessen Seiten um die Ecken drehbar sind, und aus zwei Armen $B\,O$ und $O\,D$, die sich um B, O, D drehen lassen (Siehe Figur 14!).

Bei jeder beliebigen Verschiebung des Apparats bleibt $A\,O \,.\, O\,E$ konstant. Ist diese Konstante gleich 1, so beschreibt, wenn Punkt O auf dem Zeichenblatt befestigt wird, Punkt E die inverse Kurve C'' zur Kurve C, welche A beschreibt.

Bringt man nun eine T-förmige Metallstange $J\,K\,L$ an, der Art, daß $L\,K$ stets durch E geht und A auf $J\,E$ sich bewegen muß, so umhüllt $L\,K$ die Reciprokalkurve C' derjenigen Kurve C, welche A beschreibt, O als fest vorausgesetzt.

---

1) „Nouvelles annales de math.“ Bd. 23, p. 414 (= 2. série, 3 tome) und Bd. 32, p. 71 (1873).

Während nun die Geradführung zur Herstellung inverser Kurven von keiner praktischen Bedeutung ist, da das Bereich der Punkte, welche man mit A erreichen kann, ein sehr beschränktes ist, ist die praktische Verwendung des abgeänderten Apparats (Reciprokalführung) eine unbeschränkte.

Ist nämlich der Punkt P mit A nicht mehr erreichbar, so ziehe man durch P zwei beliebige Gerade l_1 und l_2, lege $L\,K$ an dieselben und bestimme so die reciproken Punkte l_1' l_2'; deren Verbindungslinie dann reciprok zu P ist. Ähnlich verfährt man bei einer Geraden, die man mit $L\,K$ nicht mehr erreichen kann.

Bewegt man also die Reciprokalführung so, daß $L\,K$ eine Kurve C stets berührt, so beschreibt A die Reciprokalkurve C'; beschreibt A die Kurve C, so umhüllt $L\,K$ die Kurve C!

Figur 15 giebt eine mit einem solchen Apparat hergestellte Kurve in verkleinertem Maßstab.

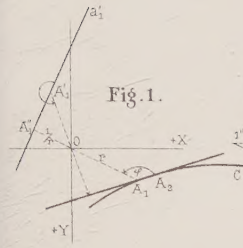

Fig. 1.

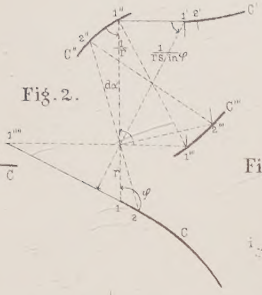

Fig. 2.

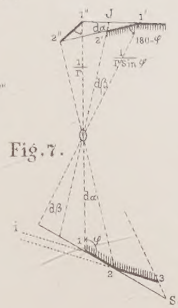

Fig. 7.

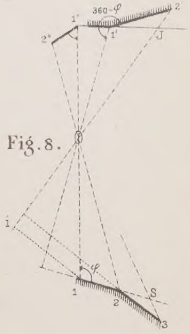

Fig. 8.

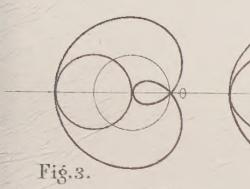

Fig. 3.

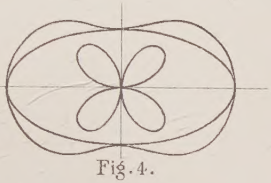

Fig. 4.

Fig. 5.

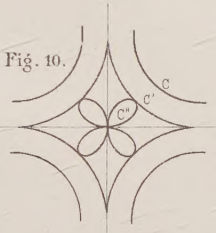

Fig. 10.

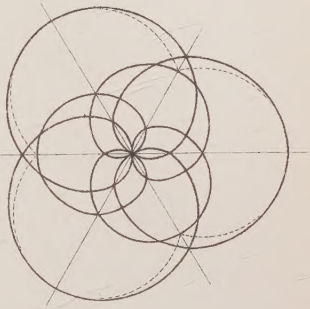

Fig. 6.

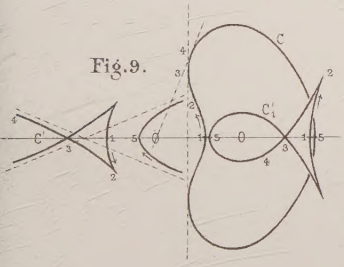

Fig. 9.

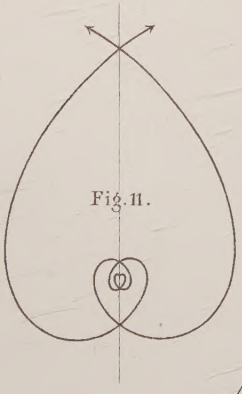

Fig. 11.

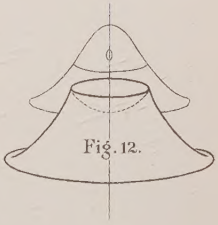

Fig. 12.

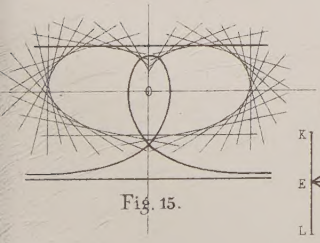

Fig. 15.

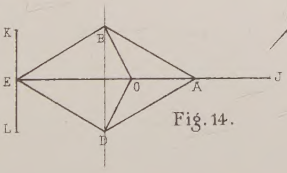

Fig. 14.

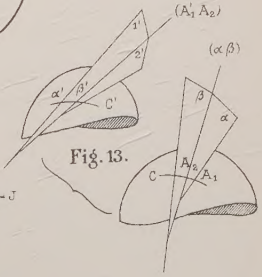

Fig. 13.